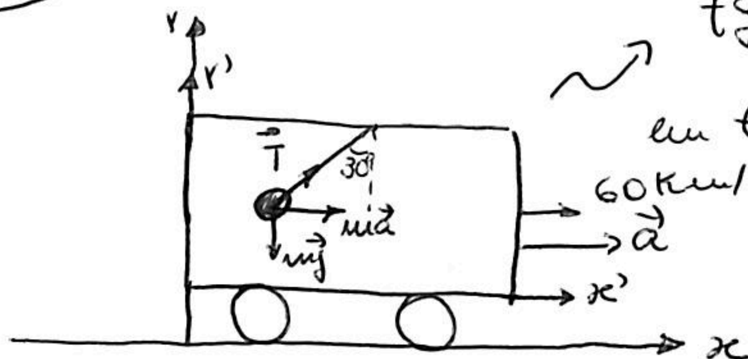
755

224

4.121 A.DIR PÁG 197



$tg\,30° = \frac{ma}{mg} \Rightarrow a_t^s = 5{,}658\,m/s^2$

em t=0 → instante em que a corda é cortada.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = cte \Rightarrow \vec{a}dt = d\vec{v} \Rightarrow \vec{a}(t-t_0) = \vec{v} - \vec{v}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}_0 dt + \vec{a}(t-t_0)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A^b = x_{0A}^b + v_{0x}^{bA} t + \frac{1}{2}a_x^{bA} t^2 \\ y_A^b = y_{0A}^b + v_{0y}^{bA} + \frac{1}{2}a_y^{bA} t^2 \\ z_A^b = z_{0A}^b + v_{0z}^{bA} + \frac{1}{2}a_z^{bA} t^2 \end{cases}$$

dispensando z (situação coplanar)

A - massa (m)

b - solo (s)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_m^s = x_{0m}^s + v_{0x}^{sm} t + \frac{1}{2}a_x^{sm} t^2 \quad (\to 0) \\ y_m^s = y_{0m}^s + v_{0y}^{sm} t + \frac{1}{2}a_y^{sm} t^2 \quad (v_{0y}^{sm} \to 0) \end{cases}$$

da segunda equação vem:

$$y_m^s - y_{0m}^s = \frac{1}{2} a_{y_m}^s t^2$$

$$-2 = -\frac{g}{2} t^2 \quad \text{sendo } g = 9,8\,m/s^2$$

$\Rightarrow$ ~~t~~ $t \simeq 0,64\,s$

e pela primeira equação:

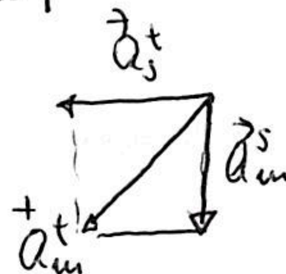
$$x_m^s - x_{0m}^s = +\frac{60}{3,6} \cdot 0,64 \Rightarrow \Delta X_{SOLO} \simeq 10,7\,m$$

~~...~~ sendo $\Delta X_{SOLO} > 0 \Rightarrow x_m^s > x_{0m}^s$ (como esperava-se)

Sendo agora
A - massa (m)
b - trem (t)

$$\begin{cases} x_m^t = x_{0m}^t + \cancel{v_{0_x m}^t t}^{\,0} + \frac{1}{2} a_{x m}^t \cdot t^2 \\ y_m^t = y_{0m}^t + \cancel{v_{0_y m}^t t}^{\,0} + \frac{1}{2} a_{y m}^t t^2 \end{cases}$$

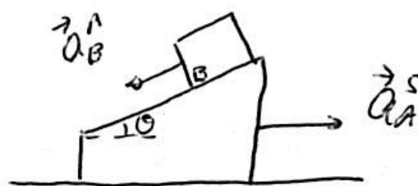
O que o enunciado pede é
logo da primeira equação: $|x_m^t - x_{0m}^t|$
~~...~~ e temos $\vec{a}_m^t = \vec{a}_m^s + \vec{a}_s^t \rightarrow$

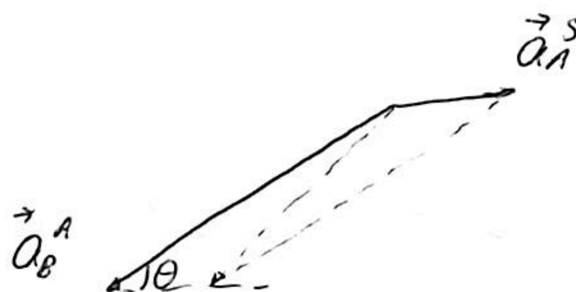


$$\Rightarrow |\vec{a}_{m_x}^t| = |\vec{a}_s^t| = 5,658\,m/s^2 \leftarrow$$

$$x_m^t - x_{0m}^t = -\frac{1}{2}\, 5,658 \cdot (0,64)^2 \Rightarrow |x_m^t - x_{0m}^t| \simeq 1,16\,m$$

(124) M.V.E. pág 131 (nova edição)





$$\vec{a}_B^S = \vec{a}_B^A + \vec{a}_A^S$$

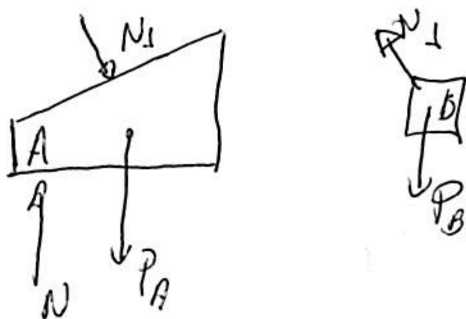
Observe que a componente horizontal de a_B^S é:

$a_B^A \cos\theta - a_A^S$

e que a componente vertical é:

$a_B^A \operatorname{sen}\theta \downarrow$

diagrama do corpo livre



Obs- de acordo com a lei da conservação da quantidade de movimento a_B^S na horizontal está para esquerda.

Obs'- Observe que a 1ª e a 3ª equações representam a conservação da quantidade de movimento na horizontal.

$$\begin{cases} N_1 \operatorname{sen}\theta = m_A a_A^S \\ P_B - N_1 \cos\theta = m_B a_B^A \operatorname{sen}\theta \\ N_1 \operatorname{sen}\theta = m_B (a_B^A \cos\theta - a_A^S) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_A^S = 1{,}55\, m/s^2 \longrightarrow \\ a_B^A = 6{,}25\, m/s^2 \swarrow 30° \end{matrix}$$

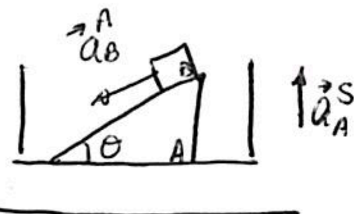
4.117 ADIR PÁG 197
(outra forma)

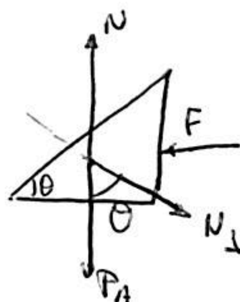
O que o enunciado pede é a aceleração de B relativa a A sendo B o bloco e A o plano inclinado.

Usando a mesma estratégia do problema anterior:



$\vec{a}_B^S = \vec{a}_B^A + \vec{a}_A^S$







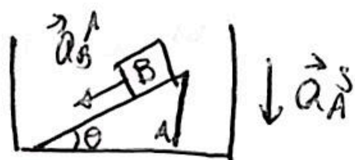
e podemos escrever:

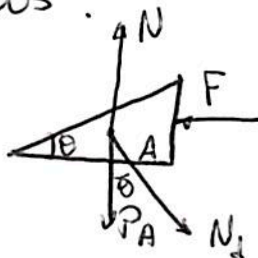
$$\begin{cases} N - P_A - N_1 \cos\theta = m_A a_A^S \\ F = N_1 \operatorname{sen}\theta \\ N_1 \operatorname{sen}\theta = m_B a_B^A \cos\theta \\ N_1 \cos\theta - P_B = m_B (a_A^S - a_B^A \operatorname{sen}\theta) \end{cases} \Rightarrow a_B^A = (a_A^S + g)\operatorname{sen}\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_B^A = (a+g)\operatorname{sen}\theta$$

p/ $a = 0 \Rightarrow a_B^A = g \operatorname{sen}\theta$ ↙θ

da mesma forma temos:







$$\begin{cases} P_A + N_1 \cos\theta - N = m_A a_A^S \\ F = N_1 \operatorname{sen}\theta \\ P_B - N_1 \cos\theta = m_B (a_B^A \operatorname{sen}\theta + a_A^S) \\ N_1 \operatorname{sen}\theta = m_B a_B^A \cos\theta \end{cases} \Rightarrow a_B^A = (g - a_A^S)\operatorname{sen}\theta \Rightarrow$$

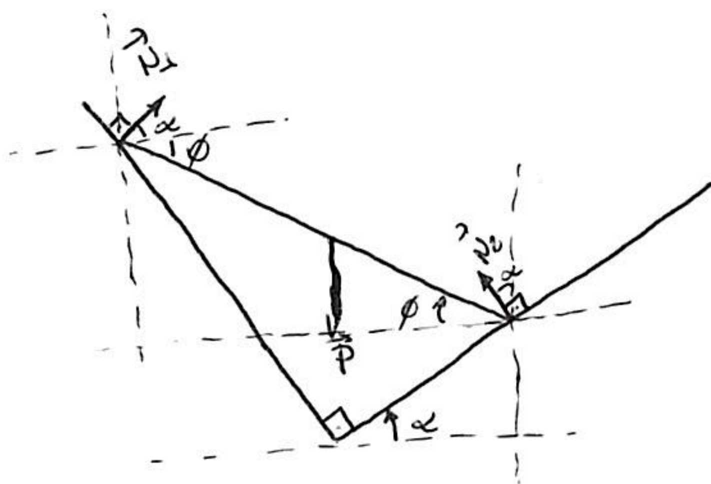
$$\Rightarrow a_B^A = (g-a)\operatorname{sen}\theta$$ ↙θ

$(a < g)$

se $a > g$ o bloco sobe verticalmente ↑

ALONSO e FINN pág 77

(4.47) Observar o esquema:



seja ℓ o comprimento da barra

$$\begin{cases} N_1 \cos\alpha = N_2 \operatorname{sen}\alpha \\ N_1 \operatorname{sen}\alpha + N_2 \cos\alpha = P \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{N_1 = P\operatorname{sen}\alpha}} \quad e \quad \underline{\underline{N_2 = P\cos\alpha}}$$

✓ nas direções indicadas na fig.

momento em relação ao ponto de atuação de $\vec{N}_2$ decompondo $\vec{N}_1$ ....

$$P\ell \frac{\cos\phi}{2} = N_1 \operatorname{sen}(\phi+\alpha)\ell$$

$$\frac{P\cos\phi}{2} = P\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\phi+\alpha)$$

$$\frac{\cos\phi}{2} = \operatorname{sen}\alpha(\operatorname{sen}\phi\cos\alpha + \cos\phi\operatorname{sen}\alpha)$$

$$\cos\phi = \operatorname{sen}2\alpha \operatorname{sen}\phi + 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\phi$$

dividindo ambos os membros por $\cos\phi$:

$$1 = \operatorname{sen}2\alpha\, tg\phi + 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\Rightarrow tg\phi = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}$$

mas

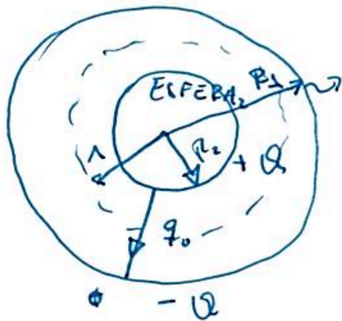
$$\cos(\alpha+\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\underline{\underline{tg\phi = \cot g\, 2\alpha}}$$

(442) P.S.F.E.

sabemos que $E = \frac{Q^2}{2C}$

P/ uma esfera vamos calcular o C.



$q = CV$

usando LEI de GAUSS ⇒

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$E = \frac{F}{q_0} \Rightarrow F = \frac{Q q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$W_{if} = \int_{R_2}^{R_1} F\, dr = \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0}\, dr = -\frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$V_f - V_i = -\frac{W_{if}}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow V = |V_f - V_i| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_1 - R_2}{R_2 R_1}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{R_2 R_1}{R_1 - R_2}\right) = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2}{1 - R_2/R_1}$$

p/ a esfera 2 isolada temos $R_1 >> R_2 \Rightarrow$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_2$$

$$\Rightarrow \quad C = 4\pi\epsilon_0 R$$

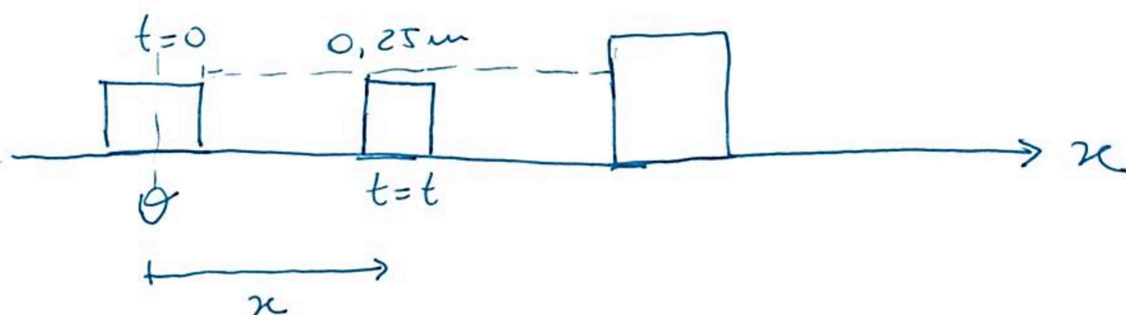
$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

(12.31) M.V.E. edição antiga

$F \propto \frac{1}{d^2} \Rightarrow F = \frac{K}{d^2}$ p/ $F = 1{,}5\,N \Leftrightarrow d = 0{,}25\,m$

logo $K = 0{,}09375$ em unidades convenientes

$f = 0{,}5 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 = 0{,}2943\,N$



$\Rightarrow F = \frac{K}{(0{,}25-x)^2}$

$\frac{K}{(0{,}25-x)^2} - f = ma$ mas $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$

$\frac{K}{(0{,}25-x)^2} - f = mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow K\int_{x_i}^{x_f} \frac{1}{(0{,}25-x)^2}dx - f\int_{x_i}^{x_f} dx = m\int_{v_i}^{v_f} v\,d$

$u = 0{,}25 - x$ / $\frac{du}{dx} = -1$ / $\Rightarrow -K\int_{u_i}^{u_f} \frac{1}{u^2}du - f(x_f - x_i) = \frac{m}{2}(v_f^2 - v_i^2)$

Observe que o lado direito da última igualdade é ΔE_c logo o lado esquerdo tem que W_{Fr}. Realmente é basta olhar a penúltima equação.

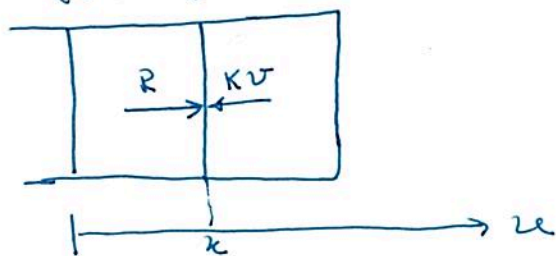
$$K\left(\frac{1}{u_f}-\frac{1}{u_i}\right) - f\,(x_f - x_i) = \frac{m}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right)$$

$$K\left(\frac{1}{0{,}25-x_f}-\frac{1}{0{,}25x_i}\right) - f\,(x_f - x_i) = \frac{m}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right)$$

p/ $x_i = 0 \;;\; v_i = 0$

$x_f = 0{,}15 \quad \Rightarrow \quad v_f = 4{,}156\,m/s \longrightarrow$

12.32 M.V.E. edição antiga.



$$R - Kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{R-Kv}{m} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{m} = \frac{dv}{R-Kv}$$

$$\frac{1}{m}\int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{R-Kv} \Rightarrow \frac{t}{m} = -\frac{1}{K}\int_{u_0}^{u_f}\frac{du}{u} = -\frac{1}{K}\ln\left(\frac{u_f}{u_0}\right)$$

$u = R - Kv$

$\frac{du}{dv} = -K$

$$\Rightarrow -\frac{Kt}{m} = \ln\left(\frac{R-Kv}{R}\right) \Rightarrow e^{-\frac{Kt}{m}} = 1 - \frac{K}{R}v$$

$$\Rightarrow v = \frac{R}{K}\left(1 - e^{-Kt/m}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{R}{m}e^{-Kt/m}$$

(12.33) M.V.E. ~~pág~~ Edição antiga

$$T_0 = K v_0 \Rightarrow K = \frac{T_0}{v_0}$$

$$F_1 = K v_R = m \frac{dv}{dt}$$

onde v_R módulo da velocidade relativa

v velocidade do navio em relação ao solo

$$K(v_0 - v) = m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{K}{m} dt = \frac{dv}{v_0 - v}$$

$$\frac{K}{m} \int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{v_0 - v} \quad / \quad u = v_0 - v, \quad \frac{du}{dv} = -1$$

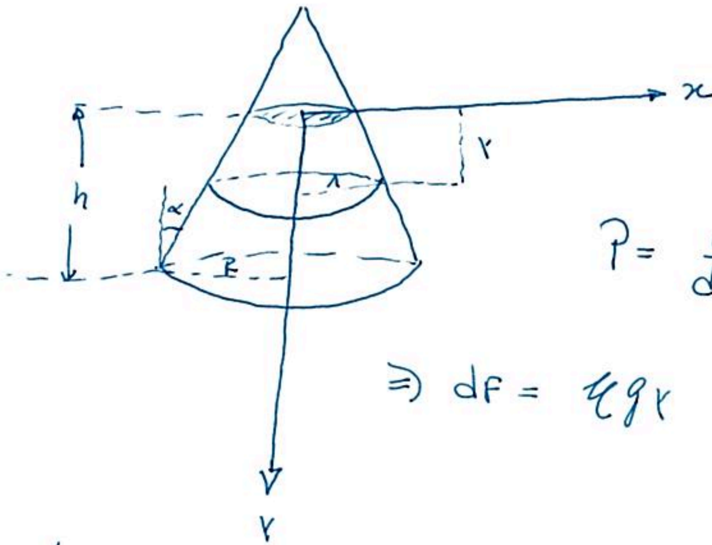
$$\frac{K}{m} t = -\int_{u_0}^{u_f} \frac{du}{u} = -\ln\left(\frac{u_f}{u_0}\right) \Rightarrow -\frac{Kt}{m} = \ln\left(\frac{v_0 - v}{v_0}\right)$$

$$\Rightarrow t = -\frac{m}{K} \ln\left(\frac{v_0 - v}{v_0}\right)$$

p/ $v = \frac{v_0}{2}$ e $K = \frac{T_0}{v_0}$ vem

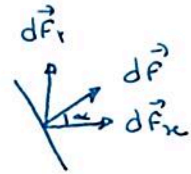
$$t = -\frac{m v_0}{T_0} \ln \frac{1}{2} = \frac{m v_0}{T_0} \ln 2$$

(262) P.S.F.E.

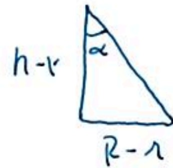


$$P = \frac{dF}{dA} \Rightarrow dF = P\, dA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dF = \rho g y \; 2\pi r\, dy$$



da fig obtemos



$$\Rightarrow r = R + tg\alpha(y - h)$$

$$dF = 2\pi \rho g y\, dy\,(R + tg\alpha\, y - tg\alpha\, h) = 2\pi R \rho g y\, dy + 2\pi \rho g\, tg\alpha\, y^2\, dy - 2\pi\rho g\, tg\alpha\, h y\, dy$$

$$~~y = dF\cos\alpha~~ = dF_y = dF \operatorname{sen}\alpha = 2\pi R \rho g \operatorname{sen}\alpha\, y\, dy + 2\pi\rho g \operatorname{sen}\alpha\, tg\alpha\, y^2 dy - 2\pi\rho g \operatorname{sen}\alpha\, tg\alpha\, h y\, dy$$

$$\Rightarrow F_y = 2\pi R \rho g \operatorname{sen}\alpha \int_0^h y\, dy + 2\pi\rho g \operatorname{sen}\alpha\, tg\alpha \int_0^h y^2 dy - 2\pi\rho g \operatorname{sen}\alpha\, tg\alpha\, h \int_0^h y\, dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_y = \pi R \rho g \operatorname{sen}\alpha\, h^2 + \frac{2}{3}\pi\rho g \operatorname{sen}\alpha\, tg\alpha\, h^3 - \pi\rho g \operatorname{sen}\alpha\, tg\alpha\, h^3$$

$$F_y = \pi R \rho g \operatorname{sen}\alpha\, h^2 - \frac{1}{3}\pi\rho g \operatorname{sen}\alpha\, tg\alpha\, h^3 = \frac{3\pi R\rho g \operatorname{sen}\alpha\, h^2 - \pi\rho g \operatorname{sen}\alpha\, tg\alpha\, h^3}{3}$$

mas $F_y = P \Rightarrow$

$$\rho = \frac{3P}{3\pi R g \operatorname{sen}\alpha\, h^2 - \pi g \operatorname{sen}\alpha\, tg\alpha\, h^3} = \frac{3P}{\pi g \operatorname{sen}\alpha\, h^2 (3R - h\, tg\alpha)}$$

(7.82) ALONSO
Pág 189.

$$F = -Kv = ma$$

$$-Kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{K}{m}dt = \frac{1}{v}dv \Rightarrow -\frac{K}{m}\int_0^t dt = \int_{v_L}^{v}\frac{1}{v}dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{K}{m}t = \ln\left(\frac{v}{v_L}\right) \Rightarrow v = v_L e^{-\frac{K}{m}t}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_L e^{-\frac{K}{m}t} \Rightarrow v_L\int_0^t e^{-\frac{K}{m}t}dt = \int_0^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_L m}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right)$$

Quando a partícula parar temos $v = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = v_L e^{-\frac{K}{m}t} \Rightarrow \frac{K}{m} \to \infty \Rightarrow x = \frac{v_L m}{K}$$

$v = v_L e^{-\frac{K}{m}t}$ para $t = \frac{m}{K} \Rightarrow v = \frac{v_L}{e}$

(7.83) ALONSO PÁG 189

$$F - Kv^2 = ma \Rightarrow p/a = 0 \Rightarrow v_L = \sqrt{F/K}$$

sendo $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

$$F - Kv^2 = mv\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{F-Kv^2}{m} = \frac{v\,dv}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{m} = \frac{v}{F-Kv^2}dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{m} = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{F-Kv^2}dv$$

$u = F - Kv^2$

$\frac{du}{dv} = -2Kv$

$$\Rightarrow \frac{x}{m} = -\frac{1}{2K}\int_{u_0}^{u_F}\frac{du}{u} = -\frac{1}{2K}\ln\left(\frac{u_F}{u_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2Kx}{m} = \ln\left(\frac{F-Kv^2}{F-Kv_0^2}\right) \Rightarrow v^2 = \frac{F}{K} + \left(v_0^2 - F/K\right)e^{-\frac{2Kx}{m}}$$

nova eq. diferencial

$$-Kv^2 = mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow -\frac{K}{m}dx = \frac{dv}{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{K}{m}x = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \Rightarrow v = v_0 e^{-Kx/m}$$

para $v = \frac{v_L}{e}$ e $v_0 = v_L \Rightarrow x = \frac{m}{K}$

(4.6) ALONSO PÁG 71

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = (400, -150, -300) \text{ Kgf.}$$

$$\vec{\tau}_{FORÇAS} = \vec{\tau}_R = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ 400 & -150 & -300 \end{vmatrix} = (3150, 7200, 600) \text{ Kgf} \cdot m$$

⇓

pois as forças são concorrentes

{sempre ocorre $\vec{\tau}_{FORÇAS} = \vec{\tau}_R$}

(4.7) ALONSO PÁG 71

$$\vec{\tau}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ -500 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 7500, 1500) \text{ Kgf} \cdot m.$$

$$\vec{\tau}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ 0 & -200 & 100 \end{vmatrix} = (2700, -400, -800) \text{ Kgf} \cdot m.$$

$$\vec{\tau}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ -100 & 50 & -400 \end{vmatrix} = (450, 100, -100) \text{ Kgf} \cdot m$$

$$\vec{\tau}_{FORÇAS} = \sum_{i=1}^{3} \vec{\tau}_i = (3150, 7200, 600) \text{ Kgf} \cdot m.$$

$$\vec{\tau}_{FORÇAS} \cdot \vec{R} = 400 \times 3150 - 150 \times 7200 - 300 \cdot 600 = 0$$

(4.9) ALONSO PÁG 73

podemos decompor a força e somar os momentos (vetorialmente).

$\vec{M}_{F_y} = \vec{0}$

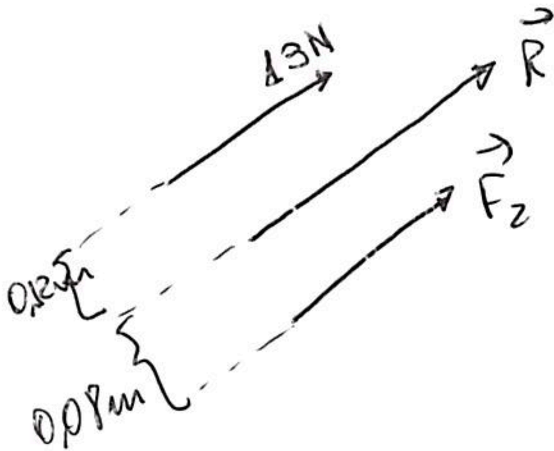
$|\vec{M}_{Fx}| = 12 \cdot \frac{10}{\sqrt{125}} \times 5 = 53,66$ ⊗ → entrando no plano do papel.

$m = tg\theta = \frac{5}{10} = 0,5$

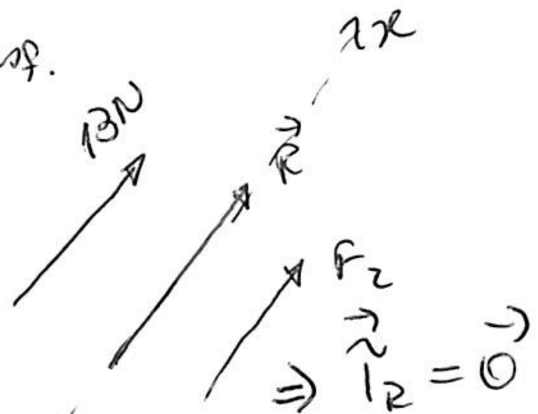
$y - 5 = 0,5x$

(4.12) ALONSO PÁG 73

considere o esquema:



imagine um eixo x conforme o esq.



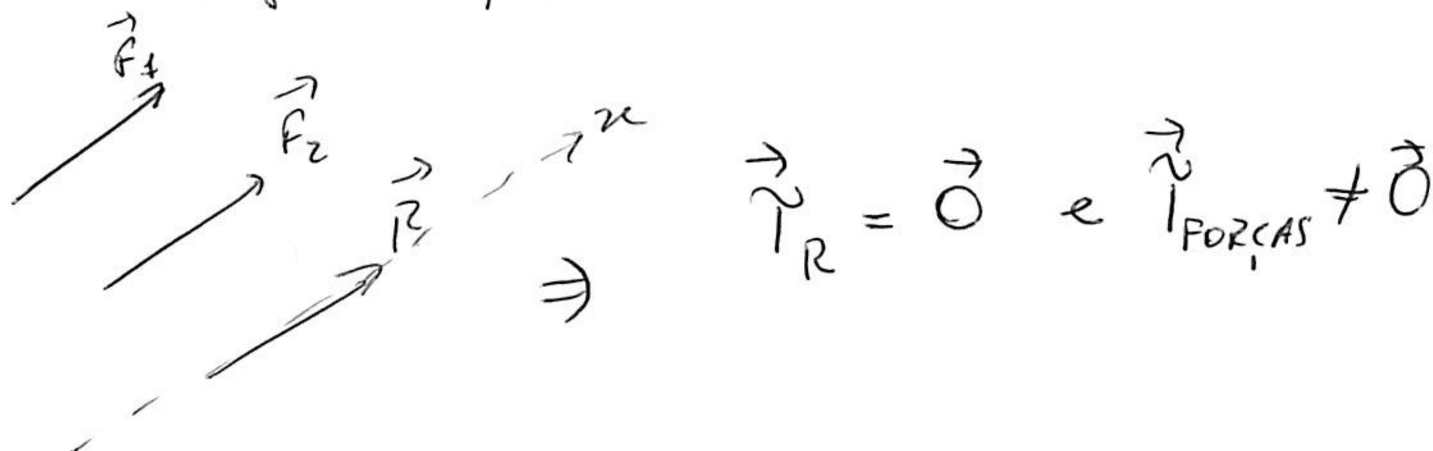
$\Rightarrow \vec{\tau}_R = \vec{0}$

mas para forças paralelas com $\vec{R} \neq \vec{0}$

vem $\vec{\tau}_R = \vec{\tau}_{FORÇAS} = \vec{0} \Rightarrow 13 \times 0,12 = F_2 \cdot 0,0$

$\Rightarrow F_2 = 19,5N$ e $R = 32,5N$.

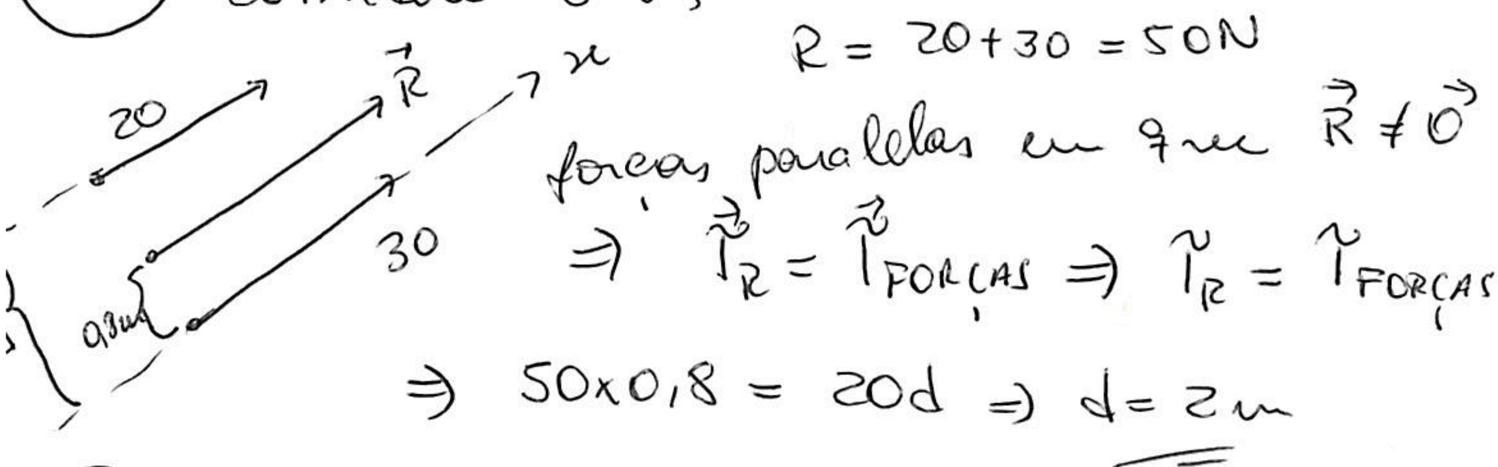
está claro que $\vec{R}$ só pode estar entre as forças pois imagine que não esteja



$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_R = \vec{0}$ e $\vec{\tau}_{FORÇAS} \neq \vec{0}$

(4.13) ALONSO PÁG 71

considere o esquema.



$R = 20 + 30 = 50N$

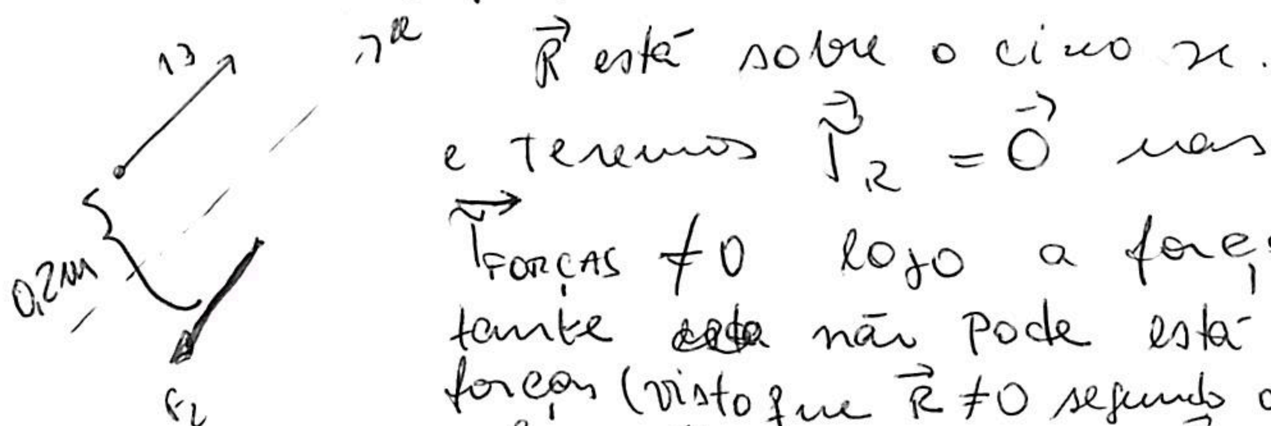
forças paralelas em que $\vec{R} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{\tau}_R = \vec{\tau}_{FORÇAS} \Rightarrow \tau_R = \tau_{FORÇAS}$

$\Rightarrow 50 \times 0,8 = 20d \Rightarrow d = 2m$

(4.14) ALONSO PÁG 71

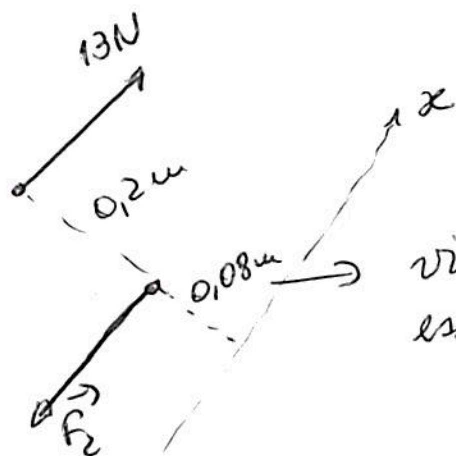
imagine agora que a resultante está entre as forças



$\vec{R}$ está sobre o eixo x.

e teremos $\vec{\tau}_R = \vec{0}$ mas $\vec{\tau}_{FORÇAS} \neq 0$ logo a força resultante ~~esta~~ não pode estar entre as forças (visto que $\vec{R} \neq 0$ segundo o enunciado e como as forças são paralelas sempre temos $\vec{\tau}_R = \vec{\tau}_{FORÇAS}$ → conforme resolvemos no problema anterior.

logo temos



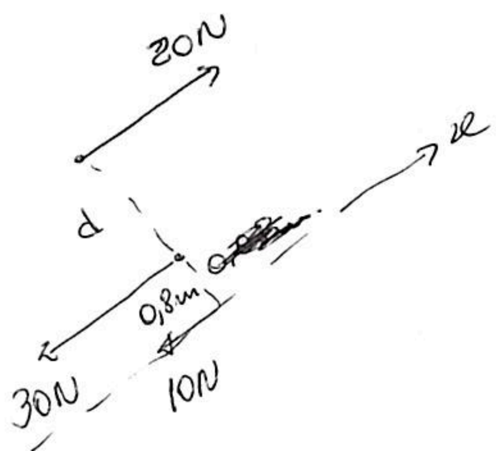
→ visto que (a linha de) $\vec{R}$ está a 0,08m de $\vec{F_2}$ essa é a única possibilidade.

$\Rightarrow \vec{\tau}_R = \vec{0}$ e $\vec{\tau}_R = \vec{\tau}_{FORÇAS} \Rightarrow \tau_R = \tau_{FORÇAS} \Rightarrow$

$\Rightarrow 13 \times 0,28 = F_2 \cdot 0,08 \Rightarrow F_2 = 45,5\,N$ e

$R = 32,5\,N$ no mesmo sentido de $\vec{F_2}$.

Conforme o caso anterior temos:



$\Rightarrow \vec{\tau}_R = \vec{0}$ e $\vec{\tau}_R = \vec{\tau}_{FORÇAS} \Rightarrow \tau_R = \tau_{FORÇAS}$

$\Rightarrow 30 \times 0,08 = 20(d + 0,8)$

$\Rightarrow d = 0,4\,m$

Questão 1

(12.63) OBS₁ : note de que como foi mostrado no gráfico do livro a força não está definida em $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \ldots$ Portanto a série de fourier dada p/ $\underline{F}$ não converge p/ ela nestes pontos. Portanto $F = F_0 (4/\pi)(\text{sen}\,\omega t + \frac{1}{3}\text{sen}\,3\omega t + \ldots)$ não é válida p/ $t = \frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}, \ldots$ Observe que jogando $t = \pi/\omega, \frac{2\pi}{\omega}, \ldots$ na equação acima obteremos $F = 0$ o que não é verdade, F não tem valor definido nestes pontos). Portanto a solução dada pelo livro p/ $x(t)$ também não é válida p/ estes pontos.

OBS₂ : Vamos modificar a questão dando apenas o gráfico de $F \times T$ pedindo $x(t)$:

Uma partícula de massa $\underline{m}$ está sujeita a força da fig do livro determine a equação de movimento da partícula sabendo que:

a) em $t = 0$ a partícula está na origem e em $t = \pi/2\omega$ sua velocidade é 5 m/s

b) em $t = 0$ a partícula está na origem e tem velocidade 3 m/s

Solução

$$F = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t < \pi/\omega \\ -F_0 & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

sendo F periódica fora deste intervalo (logo podemos calcular a série de fourier de f)

Está claro que F tem período $2\pi/\omega$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t) \cos n\cancel{\pi} t \frac{\omega}{\cancel{\pi}}\, dt \Rightarrow a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t) \cos n\omega t\, dt$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\omega}{\pi} \left[\int_{-\pi/\omega}^{0} -F_0 \cos n\omega t\, dt + \int_{0}^{\pi/\omega} F_0 \cos n\omega t\, dt \right]$$

OBS - apesar de $t \in [0, +\infty)$ não afeta em nada se considerarmos a função F periódica de $t \in (-\infty, +\infty)$ e utilizarmos o intervalo que quisermos.

$$P/\ n = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{\omega}{\pi}\left[-F_0 \frac{\pi}{\omega} + F_0 \frac{\pi}{\omega} \right] \Rightarrow a_0 = 0$$

(caso deixássemos p/ calcular a_0 na fórmula final não poderíamos já que apareceria alguma coisa do tipo $\frac{1}{\ldots}$

P/ $n = 1, 2, 3, \ldots$ Podemos escrever:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\left[-F_0 \frac{1}{n\omega}\left(\operatorname{sen} 0 - \operatorname{sen} n\omega\left(-\frac{\pi}{\omega}\right)\right) + F_0 \frac{1}{n\omega}\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{\omega} n\omega - \operatorname{sen} 0\right)\right]$$

$$\Rightarrow a_n = 0 \quad P/ \; n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t) \operatorname{sen} n\pi t \frac{\omega}{\pi}\, dt \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(não precisamos discutir b_0 pois não usamos b_0 na série de fourier

$$\Rightarrow b_n = \frac{\omega}{\pi}\left[\int_{-\pi/\omega}^{0} -F_0 \operatorname{sen} n\omega t\, dt + \int_{0}^{\pi/\omega} F_0 \operatorname{sen} n\omega t\, dt\right]$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\left[+ F_0 \frac{1}{n\omega}(\cos 0 - \cos n\pi) - F_0 \frac{1}{n\omega}(\cos n\pi - \cos 0)\right]$$

$$b_n = \frac{F_0}{n\pi}[1 - \cos n\pi] - \frac{F_0}{n\pi}[\cos n\pi - 1] = \frac{2F_0}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

mas $\cos n\pi = (-1)^n \Rightarrow b_n = \frac{2F_0}{n\pi}[1 - (-1)^n] \quad n = 1, 2, \ldots$

P/ $n = 2K \quad K = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow b_n = b_{2K} = 0$

P/ $n = 2K - 1 \quad K = 1, 2, \ldots \Rightarrow b_n = b_{2K-1} = \frac{4F_0}{(2K-1)\pi}$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} \frac{4F_0}{(2K-1)\pi} \operatorname{sen}[(2K-1)t\omega] = \frac{4F_0}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2K-1)\omega t]}{2K-1}$$ é a

série de fourier de F

convergindo p/ $F(t)$ $\forall t$ exceto $t = \pi/\omega,\ 2\pi/\omega, \ldots$

Portanto podemos escrever:

$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi}\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\omega t + \cdots\right) \quad \text{válida p/ } \forall t \text{ exceto } t = \pi/\omega,\ 2\pi/\omega$$

mas $F_R = F(t) = m\,a$

$$\Rightarrow \frac{4F_0}{\pi}\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\omega t + \cdots\right) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{4F_0}{\pi m}\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\omega t + \cdots\right)$$

homogênea $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = A' \Rightarrow dx = A'dt \Rightarrow x_h = A't + B'$

onde $A', B', C', \ldots$ são ctes.

$\ddot{x} = \dfrac{4F_0}{\pi m}\operatorname{sen}\omega t$ vamos tentar $x_{p_1} = C'\operatorname{sen}\omega t + D'\cos\omega t$

$\dot{x}_{p_1} = C'\omega\cos\omega t - D'\omega\operatorname{sen}\omega t \qquad \ddot{x}_{p_1} = -C'\omega^2\operatorname{sen}\omega t - D'\omega^2\cos\omega t$

$$\Rightarrow -C'\omega^2\operatorname{sen}\omega t - D'\omega^2\cos\omega t = \frac{4F_0}{\pi m}\operatorname{sen}\omega t$$

$\Rightarrow D' = 0$

$$-C'\omega^2 = \frac{4F_0}{\pi m} \Rightarrow C' = -\frac{4F_0}{\pi m\omega^2} \Rightarrow x_{p_1} = -\frac{4F_0}{\pi m\omega^2}\operatorname{sen}\omega t$$

$\ddot{x} = \dfrac{4F_0}{\pi m}\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}3\omega t \qquad x_{p_2} = E'\operatorname{sen}3\omega t + F'\cos3\omega t$

$\Rightarrow \dot{x}_{p_2} = 3\omega E'\cos3\omega t - 3\omega F'\operatorname{sen}3\omega t \qquad \ddot{x}_{p_2} = -9\omega^2E'\operatorname{sen}3\omega t - 9\omega^2F'\cos3\omega t$

$$\Rightarrow -9\omega^2E'\operatorname{sen}3\omega t - 9\omega^2F'\cos3\omega t = \frac{4F_0}{\pi m}\frac{1}{3}\operatorname{sen}3\omega t \Rightarrow F' = 0 \text{ e } E' = -\frac{1}{3}\frac{1}{9\omega^2}\frac{4F_0}{\pi m}$$

$$\Rightarrow x_{p_2} = -\frac{1}{3}\frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m w^2} sen\, 3wt$$

$$\ddot{x} = \frac{4F_0}{\pi m}\frac{1}{5} sen\, 5wt \qquad x_{p_3} = G' sen\, 5wt + H' \cos 5wt$$

$$\dot{x}_{p_3} = 5wG' \cos 5wt - 5wH' sen\, 5wt \qquad \ddot{x}_{p_2} = -25w^2 G' sen\, 5wt - 25w^2 H' \cos 5wt$$

$$\Rightarrow -25w^2 G' sen\, 5wt - 25w^2 H' \cos 5wt = \frac{4F_0}{\pi m}\frac{1}{5} sen\, 5wt$$

$$\Rightarrow H' = 0 \quad e \quad G' = -\frac{1}{5}\frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m w^2} \quad \Rightarrow x_{p_3} = -\frac{1}{5}\frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m w^2} sen\, 5wt$$

Portanto

$$x_p = x_{p_1} + x_{p_2} + x_{p_3} + \cdots$$

$$\Rightarrow x_p = -\frac{4F_0}{\pi m w^2} sen\, wt - \frac{1}{3}\frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m w^2} sen\, 3wt - \frac{1}{5}\frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m w^2} sen\, 5wt - \cdots$$

mas $x = x_p + x_h$

$$\Rightarrow x = B' + A't - \frac{4F_0}{\pi m w^2} sen\, wt - \frac{1}{3}\frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m w^2} sen\, 3wt - \frac{1}{5}\frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m w^2} sen\, 5wt - \cdots$$

Onde A' e B' são constantes que dependem de condições de contorno.

A equação acima p/ a posição da partícula não é válida p/ $t = \pi/w,\ 2\pi/w, \ldots$ Portanto não podemos avaliar onde a partícula está nestes instantes.

a) $$\dot{x} = A' - \frac{4F_0}{\pi m w} \cos wt - \frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m w} \cos 3wt - \frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m w} \cos 5wt - \cdots$$

$x(0) = B' = 0$

$$\dot{x}(\pi/2w) = A' - \frac{4F_0}{\pi m w} \overbrace{\cos w\frac{\pi}{2w}}^{0} - \frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m w} \overbrace{\cos 3w\frac{\pi}{2w}}^{0} - \frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m w} \overbrace{\cos 5w\frac{\pi}{2w}}^{0} - \cdots = 5$$

$\Rightarrow \quad A' = 5$

$$\Rightarrow \boxed{x = 5t - \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{3}\frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \operatorname{sen} 3\omega t - \frac{1}{5}\frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \operatorname{sen} 5\omega t - \dots}$$

válida p/ $\forall t$ exceto $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$

2) $x(0) = B' = 0$

$$\dot{x}(0) = A' - \frac{4F_0}{\pi m \omega} - \frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m \omega} - \frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m \omega} \dots = 3$$

$$\Rightarrow A' = 3 + \frac{4F_0}{\pi m \omega} + \frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m \omega} + \frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m \omega} + \dots$$

$$\Rightarrow x = \left(3 + \frac{4F_0}{\pi m \omega} + \frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m \omega} + \frac{1}{25}\frac{4F_0}{\pi m \omega} + \dots\right) t - \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{3}\frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \operatorname{sen} 3\omega t - \dots$$

mas está mostrado na <u>Questão 3</u> que: $1 + 1/9 + 1/25 + \dots = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{(2K-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$\Rightarrow \boxed{x = \left(3 + \frac{F_0 \pi}{2m\omega}\right) t - \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{3}\frac{1}{9}\frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \operatorname{sen} 3\omega t - \dots \quad \text{p/ } \forall t \text{ exceto } t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots}$$

OBS: caso tivéssemos definido F como sendo zero em $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$ a série de F convergiria p/ F em todos os pontos visto que:

caso F tivesse sido definida assim ou se redefiníssemos por nossa conta desta maneira ∴ então a resposta seria válida para qualquer t.

a série de F → F (nos ptos de continuidade de F)

a série de F → $\dfrac{\lim_{t \to p^-} F + \lim_{t \to p^+} F}{2}$ (nos pontos de descontinuidade)

sendo F descontínua em $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$

então a série de Fourier convergirá p/ $\underline{\underline{0}}$ $\left(\dfrac{\lim_{t \to \pi/\omega^-} F + \lim_{t \to \pi/\omega^+} F}{2} = \dfrac{\lim_{t \to 2\pi/\omega^-} F + \lim_{t \to 2\pi/\omega^+} F}{2} = \dots \right)$

e como definimos é o valor de F nestes pontos

Questão 2: determine $x(t)$ tal que:

$$x'' - 2x' + x = te^t + 4 \qquad x(0) = 1 \quad x'(0) = 1$$

Solução:

homogênea: $x'' - 2x' + x = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\Delta = 0$ $\Rightarrow x_h = c_1 e^t + c_2 t e^t$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{2} = 1$

$x'' - 2x' + x = 4$

Vamos tentar $x_{p_1} = A$ $\Rightarrow x'_{p_1} = x''_{p_1} = 0$

$\Rightarrow A = 4 \Rightarrow x_{p_1} = 4$

$x'' - 2x' + x = te^t$

Vamos tentar $x_{p_2} = (B + Ct)e^t$ mas existe solução desta que é solução da homogênea $\Rightarrow x_{p_2} = (B + Ct)te^t$ mas continua o mesmo problema

$\Rightarrow x_{p_2} = (B + Ct)t^2 e^t$

$\Rightarrow \dot{x}_{p_2} = Ct^2e^t + (2te^t + t^2e^t)(B + Ct) = (B + 3C)t^2e^t + Ct^3e^t + 2tBe^t$

$\ddot{x}_{p_2} = (B + 3C)(2te^t + t^2e^t) + C(3t^2e^t + t^3e^t) + 2B(e^t + te^t)$

$\Rightarrow \ddot{x}_{p_2} = 2Bte^t + Bt^2e^t + 6Cte^t + 3Ct^2e^t + 3Ct^2e^t + Ct^3e^t + 2Be^t + 2Bte^t$

$\Rightarrow \ddot{x}_{p_2} = (4B + 6C)te^t + (6C + B)t^2e^t + Ct^3e^t + 2Be^t$

Jogando na equação:

$(4B + 6C)te^t + (6C + B)t^2e^t + Ct^3e^t + 2Be^t - 2(B + 3C)t^2e^t - 2Ct^3e^t - 4tBe^t + Bt^2e^t + Ct^3e^t = te^t$

$6Cte^t + 2Be^t = te^t$ $\Rightarrow B = 0$, $C = 1/6$ $\Rightarrow x_{p_2} = \frac{t^3e^t}{6}$

$\Rightarrow x_p = \frac{t^3e^t}{6} + 4$ e $x = x_h + x_p = c_1e^t + c_2te^t + \frac{t^3e^t}{6} + 4$

mas $x(0) = c_1 + 4 = 1 \Rightarrow c_1 = -3$

$$x' = c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t + \frac{3t^2 e^t + t^3 e^t}{6}$$

$\Rightarrow x'(0) = -3 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 4$

$$\Rightarrow x = -3e^t + 4te^t + \frac{t^3 e^t}{6} + 4$$



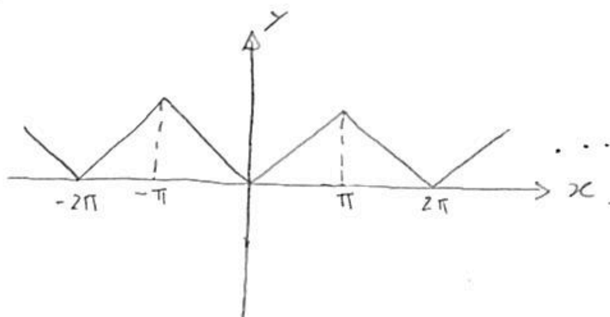
Questão 3: considere a função periódica f, de período 2π efinida por $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

a) Determine a série de fourier de f.

b) usando o primeiro item mostre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

c) usando parseval calcule $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$

Solução:



stá claro que f é uma função par então já podemos screver:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$ onde l é o semiperíod $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\pi a_n}{2} = \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx \qquad n = 0,1,2,\dots$$

P/ $n = 0 \Rightarrow \frac{\pi a_0}{2} = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow a_0 = \pi$

P/ $n = 1,2,\dots \Rightarrow$

$$\frac{\pi a_n}{2} = \int_0^{\pi} \overset{u}{x}\,\overset{dv}{\cos nx\,dx} = \left[\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx - \int \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\,dx\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi a_n}{2} = \left[\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$$

mas $\cos n\pi = (-1)^n$

$$\Rightarrow \frac{\pi a_n}{2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \Rightarrow a_n = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}$$

mas $a_{2k} = 0$

$a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}$ com $k = 1,2,\dots$

logo a série de fourier de f será: $\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos[(2k-1)x] =$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2}$$

//

Como f é contínua em todos os pontos (verifique) então podemos escrever para todo x que:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2}$$

p/ x = 0 na equação anterior temos:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \qquad \text{mas } f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(usamos este resultado na Questão 1)

Parseval $\Rightarrow$ $$\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$(f(x))^2$ é par $\Rightarrow$ $\int_{-\ell}^{\ell} [f(x)]^2 dx = 2\int_0^{\ell} [f(x)]^2 dx$

$b_n = 0$ p/ $n = 1, 2, \ldots$ e $\ell = \pi$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2k-1)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \pi^3 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

$$\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Questão 4: Esta questão serve p/ enfatizar de que quando uma função f não é contínua num ponto sua série de fourier converge p/ $\dfrac{\lim_{x\to p^-} f + \lim_{x\to p^+} f}{2}$ e não p/ f.

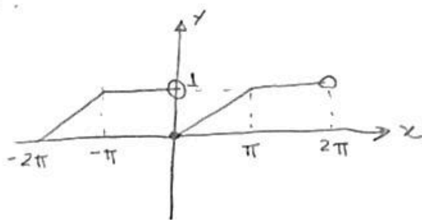
Considere a função periódica de período 2π que em $[-\pi,\pi)$ está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x/\pi & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

e seja $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ a sua série de fourier

então calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Solução.



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi}\,dx = \frac{3}{2}$$

em $x = 0$ f é descontínua (verifique)

a série de fourier de f é: $\dfrac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$

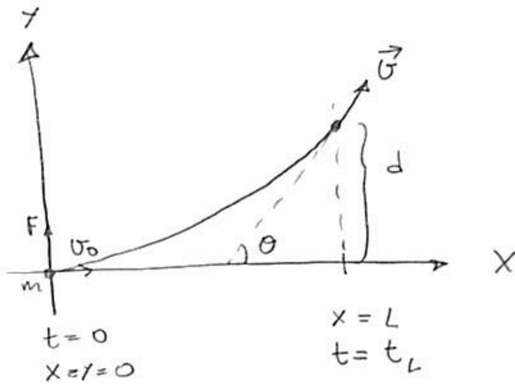
p/ $x = 0$ a série de fourier é $\dfrac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

mas $\dfrac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é igual a $\dfrac{\lim_{x\to 0^-} f + \lim_{x\to 0^+} f}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}$ e não a $f(0)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$



7.69) Alonso pg 187



sendo m = cte $\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F} = F\vec{j}$ $\quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ $\Rightarrow \displaystyle\int_0^t \vec{a}\,dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}$

mas $\vec{F} = cte \Rightarrow \vec{a} = cte \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \dfrac{\vec{F}}{m}t$ mas $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

$\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$

$v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_0\vec{i} + \dfrac{F}{m}t\,\vec{j}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \Rightarrow \text{p/ qualquer } t \quad v_x = v_0 = cte \\ v_y = \dfrac{F}{m}t \end{cases}$

p/ um instante qualquer $\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{F\,t}{m\,v_0}$

$v_x = v_0 = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow t_L = \dfrac{L}{v_0} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{FL}{m v_0^2}$

$v_y = \dfrac{F}{m}t = \dfrac{dy}{dt} \Rightarrow \displaystyle\int_0^d dy = \int_0^{L/v_0} \frac{F}{m}t\,dt$

$\Rightarrow d = \dfrac{FL^2}{2 m v_0^2}$

P/ 2ª fase:

na direção x não existe força ⇒ $x = v_0 t$ (M.U)

$L = v_0 t_L \Rightarrow t_L = \frac{L}{v_0}$

na direção y $F = cte \Rightarrow a = cte \Rightarrow$ M.U.V

$\Rightarrow y = \frac{1}{2} a t^2 \qquad a = \frac{F}{m} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$

$$\Rightarrow d = \frac{F}{2m} \frac{L^2}{v_0^2}$$

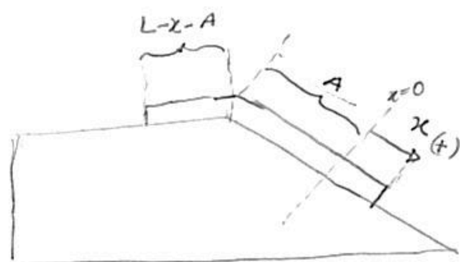
$v_y = a t = \frac{F}{m} t$

$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{F t}{m v_0}$

P/ $t = t_L \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \frac{F L}{m v_0^2}$

(7.78) ALONSO Pg 188

Para um instante qualquer posterior ao início do movimento observe a esfera:



mudamos a notação do livro de $\underline{a}$ para $\underline{A}$

e temos: $\frac{W}{g}$ — L

$\frac{P}{g}$ — $A+x$ $\Rightarrow$ $P = \frac{W}{L}(A+x)$

$$\Rightarrow \frac{W}{L}(A+x)\,\text{sen}\,\alpha = \frac{W}{g}\,a$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\overset{v}{\frac{dx}{dt}} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^v v\frac{dv}{dx} = \int_0^{L-A} \frac{g}{L}(A+x)\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\alpha\,(L^2-A^2)}$$

7.79) ALONSO Pg 188.

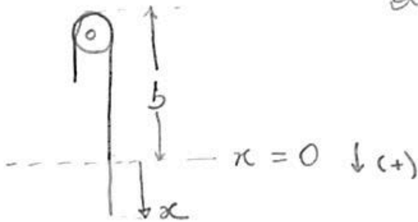
Para a aceleração neste instante podemos escrever:

$M - L$
$M' - \frac{2}{3}L$ $\Rightarrow M' = \frac{2}{3}M \Rightarrow M'' = 1 - M' = \frac{1}{3}M$ e temos:

já que a corda é uniforme!

$$\frac{2}{3}Mg - \frac{1}{3}Mg = Ma \Rightarrow a = \frac{1}{3}g$$

cálculo da velocidade:
para um instante qualquer depois do inicio do movimento observe o esquema:



$\Rightarrow$ $M - L$
$M_D - b+x$ $\Rightarrow M_D = \frac{M}{L}(b+x)$ e $M_E = 1 - M_D = \frac{M}{L}(L-b-x)$

e temos $$\frac{M}{L}(b+x) - \frac{M}{L}(L-b-x) = M\frac{a}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{2x+2b-L}{L} \quad \text{mas} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow v\frac{dv}{dx} = \frac{g}{L}(2x+2b-L) \quad \text{ou} \quad \int_0^v v\,dv = \frac{g}{L}\int_0^{\frac{2}{3}L-b}(2x+2b-L)\,dx$$

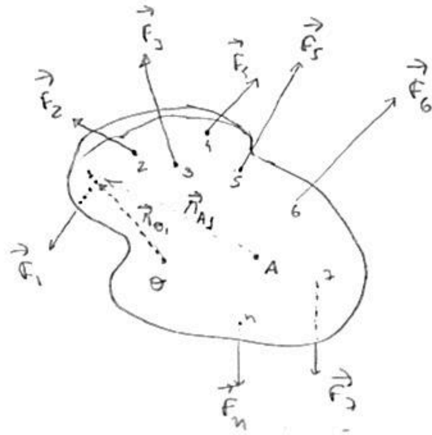
$$\Rightarrow v = \left[\frac{2g}{L}\left(\frac{7}{3}bL - \frac{2}{9}L^2 - 3b^2\right)\right]^{1/2}$$ válida é claro para $b < \frac{2}{3}L$.

Obs.- O fato de que o raio do pino seja muito pequeno ⇒ que podemos escrever que o comprimento do lado esquerdo + lado direito = L / ou seja que o comprimento $\pi r \ll L$.

P65

ALONSO

(4.20)



(só colocamos um corpo p/ facilitar o raciocínio, mas observe que em instante nenhum do desenvolvimento levamos em conta isso, ou seja o sistema de forças pode estar "livre" no espaço.)

$$\vec{\tau}_O = \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{On} \times \vec{F}_n$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{An} \times \vec{F}_n$$

mas $\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{Oi} = \vec{r}_{Ai}$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_A = (\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{O1}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{O2}) \times \vec{F}_2 + \dots + (\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{On}) \times \vec{F}_n$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_A = \vec{r}_{AO} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{AO} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{AO} \times \vec{F}_n + \vec{r}_{On} \times \vec{F}_n$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_A = (\vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{On} \times \vec{F}_n) + \vec{r}_{AO} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)$$

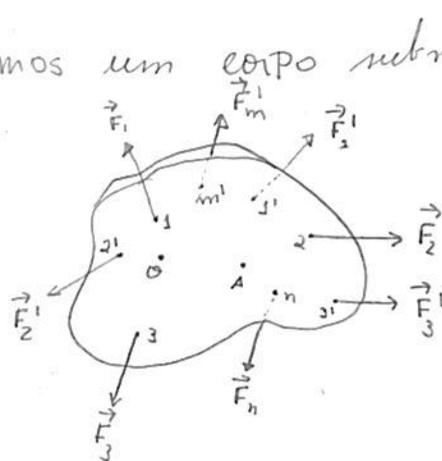
As forças concorrem num ponto $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_A = \vec{\tau}_O + \vec{r}_{AO} \times \vec{R}$$

Questão: mostre que se dois sistemas de forças são equivalentes em relação a um ponto então serão equivalentes em qualquer outro ponto.

SOLUÇÃO

Para facilitar novamente observemos um corpo submetido a dois sistemas de forças:



Sistema $S(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \dots; \vec{F}_n)$

sistema $S'(\vec{F}_1'; \vec{F}_2'; \dots; \vec{F}_m')$

com as forças aplicadas nos pontos indicados.

Imagine que os dois sistemas são equivalentes em $\underline{O}$, vamos mostrar que eles são também equivalentes em um ponto arbitrário $\underline{A}$.

estudo p/ o ponto $\underline{O}$:

S: $\vec{R}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$; $\vec{M}_O = \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{On} \times \vec{F}_n$

S': $\vec{R}_O' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_m'$; $\vec{M}_O' = \vec{r}_{O1'} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{O2'} \times \vec{F}_2' + \dots \vec{r}_{Om'} \times \vec{F}_m'$

mas os sistemas são equivalentes em $O \Rightarrow \vec{R}_O = \vec{R}_O'$ (I)

$\vec{M}_O = \vec{M}_O'$ (II)

estudo p/ o ponto $\underline{A}$:

S: $\vec{R}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$; $\vec{M}_A = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{An} \times \vec{F}_n$

S': $\vec{R}_A' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_m'$; $\vec{M}_A' = \vec{r}_{A1'} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{A2'} \times \vec{F}_2' + \dots + \vec{r}_{Am'} \times \vec{F}_m'$

está claro que a resultante p/ os sistemas S e S' não se alteram por isso escrevemos $\left(\begin{matrix} \vec{R}_A = \vec{R}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \\ \vec{R}_{A'} = \vec{R}_{O'} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots \vec{F}_m' \end{matrix}\right)$ se não estiver claro ver observação feita no P 3.44 do Beer.

DE (I) fica claro então que:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A'$$

agora só falta mostrarmos que $\vec{M}_A = \vec{M}_A'$ p/ que o problema esteja resolvido.

Observe que podemos escrever:

$$\begin{cases} \vec{r}_{OA} + \vec{r}_{Ai} = \vec{r}_{Oi} & (III) \\ \vec{r}_{OA} + \vec{r}_{Ai'} = \vec{r}_{Oi'} & (IV) \end{cases} \quad (III)-(IV) \Rightarrow \vec{r}_{Ai} - \vec{r}_{Ai'} = \vec{r}_{Oi} - \vec{r}_{Oi'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{Ai'} = \vec{r}_{Ai} + \vec{r}_{Oi'} - \vec{r}_{Oi} \quad (V)$$

Jogando (V) em $\vec{M}_A'$ temos:

$$\vec{M}_A' = (\vec{r}_{A1} + \vec{r}_{O1'} - \vec{r}_{O1}) \times \vec{F}_1' + (\vec{r}_{A2} + \vec{r}_{O2'} - \vec{r}_{O2}) \times \vec{F}_2' + \dots + (\vec{r}_{An} + \vec{r}_{Om'} - \vec{r}_{On}) \times \vec{F}_m' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A' = (\vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{O1'} \times \vec{F}_1' - \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1') + (\vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2' + \vec{r}_{O2'} \times \vec{F}_2' - \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2') + \dots + (\vec{r}_{An} \times \vec{F}_m' + \vec{r}_{Om'} \times \vec{F}_m' - \vec{r}_{On} \times$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A' = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2' + \dots + \vec{r}_{An} \times \vec{F}_m' - \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1' - \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2' - \dots - \vec{r}_{On} \times \vec{F}_m' + \vec{r}_{O1'} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{O2'} \times \vec{F}_2' + \dots + \vec{r}_{Om'} \times \vec{F}_m'$$

mas com (II) e (III) podemos escrever: de (II) $\vec{M}_O' = \vec{M}_O$

$$\Rightarrow \vec{M}_A' = (\vec{r}_{O1} - \vec{r}_{OA}) \times \vec{F}_1' + (\vec{r}_{O2} - \vec{r}_{OA}) \times \vec{F}_2' + \dots + (\vec{r}_{On} - \vec{r}_{OA}) - \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1' - \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2' - \dots - \vec{r}_{On} \times \vec{F}_m' + \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{On} \times$$

desenvolvendo vamos encontrar:

$$\vec{M}_A' = -\vec{r}_{OA} \times (\vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_m') + \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{On} \times \vec{F}_n$$

mas $\vec{R}_A = \vec{R}_A' \Rightarrow \vec{M}_A' = -\vec{r}_{OA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) + \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{On} \times \vec{F}_n$

$$\Rightarrow \vec{M}_A' = (\vec{r}_{O1} - \vec{r}_{OA}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_{O2} - \vec{r}_{OA}) \times \vec{F}_2 + \dots + (\vec{r}_{On} - \vec{r}_{OA}) \times \vec{F}_n$$

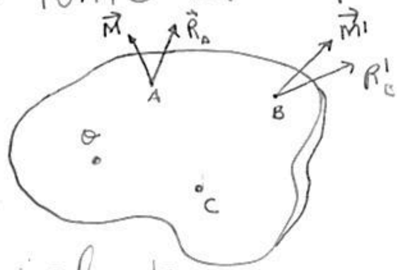
mas de (III) $\Rightarrow \vec{M}_A' = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{An} \times \vec{F}_n \Rightarrow \boxed{\vec{M}_A' = \vec{M}_A}$

Observe que A é um ponto qualquer.

novamente os sistemas podem não atuar num corpo só o colocamos para visualizar

solução alternativa mais simples.

Como sabemos qualquer sistema de forças pode ser substituído por uma força e um binário em um dado ponto logo imagine que reduzimos o sistema S por uma força e um binário no Ponto A e o sistema S' por uma força e um binário no Ponto B. conforme a figura abaixo:



$\vec{M}$ e $\vec{R}$ representam o sistema S já reduzido em

$\vec{M}'$ e $\vec{R}'$ representam o sistema S' já reduzido em

como S e S' são equivalentes em relação a O podemos escrever:

$\vec{R}_O = \vec{R}'_O = \vec{R}_A = \vec{R}'_B = \vec{R}$ (I)

$\vec{r}_{OA} \times \vec{R}_A + \vec{M} = \vec{r}_{OB} \times \vec{R}'_B + \vec{M}'$ mas de (I) $\Rightarrow \vec{r}_{OA} \times \vec{R} + \vec{M} = \vec{r}_{OB} \times \vec{R} + \vec{M}'$ (II

estudo p/ o Ponto C:

sistema S: $\vec{R}_C = \vec{R}$ (daqui por diante vamos escrever $\vec{R}$ em vez de $\vec{R}_A$ ou $\vec{R}$ por exm

$\vec{M}_C = \vec{r}_{CA} \times \vec{R} + \vec{M}$

Sistema S': $\vec{R}'_C = \vec{R}$

$\vec{M}'_C = \vec{r}_{CB} \times \vec{R} + \vec{M}'$ $\Big\{$ mas $\vec{r}_{CB} + \vec{r}_{BA} = \vec{r}_{CA}$

$\Rightarrow \vec{M}'_C = (\vec{r}_{CA} - \vec{r}_{BA}) \times \vec{R} + \vec{M}' = \vec{r}_{CA} \times \vec{R} - \vec{r}_{BA} \times \vec{R} + \vec{M}'$ mas $\vec{r}_{OB} + \vec{r}_{BA} = \vec{r}_{OA}$

$\Rightarrow \vec{M}'_C = \vec{r}_{CA} \times \vec{R} - (\vec{r}_{OA} - \vec{r}_{OB}) \times \vec{R} + M' \Rightarrow \vec{M}'_C = \vec{r}_{CA} \times \vec{R} - \vec{r}_{OA} \times \vec{R} + \vec{r}_{OB} \times \vec{R} + \vec{M}'$

mas de (II) temos que: $\vec{M} = \vec{r}_{OB} \times \vec{R} - \vec{r}_{OA} \times \vec{R} + \vec{M}' \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{M}'_C = \vec{r}_{CA} \times \vec{R} + \vec{M} = \vec{M}_C$ como queríamos mostrar.



$$\vec{r}' + \vec{r}_{BA} = \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{r}'' + \vec{r} - \vec{r}' = \vec{r}'''}$$

$\vec{r} \times \vec{F} + \vec{M}$

(2) $\vec{r}' \times \vec{F} + \vec{M}_1$

$$r \times \vec{F} + \vec{M} = \vec{r}' \times \vec{F} + \vec{M}'$$

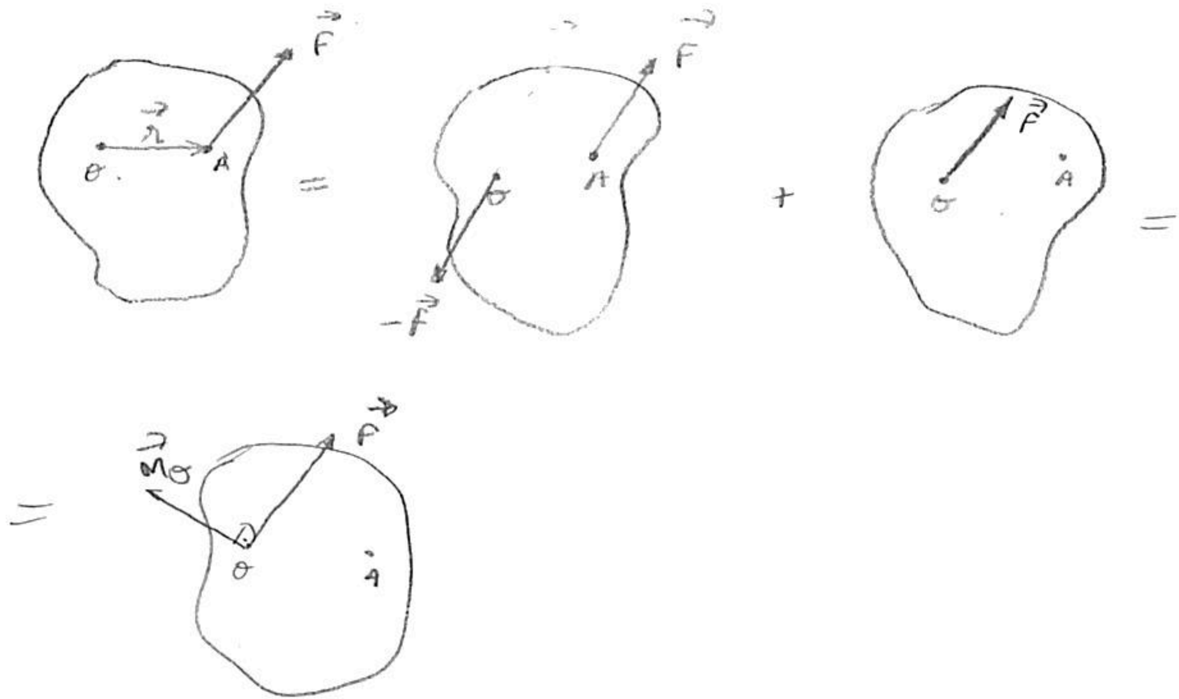
$$\vec{M} = \vec{r}' \times \vec{F} + \vec{M}' - \vec{r} \times \vec{F}$$

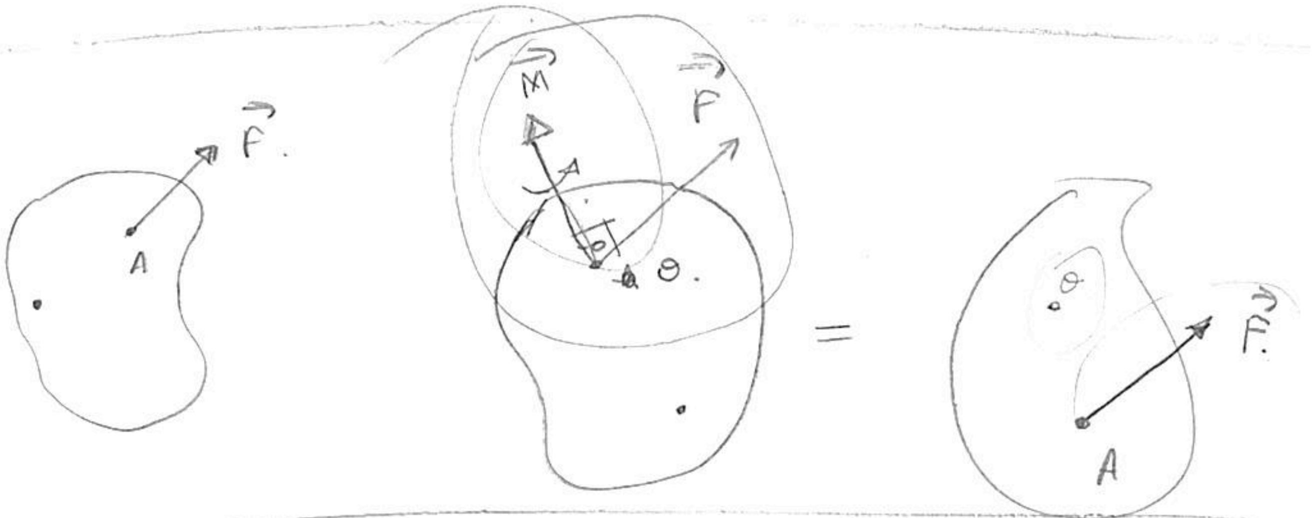
$\vec{r}''' \times \vec{F} + \vec{M}$

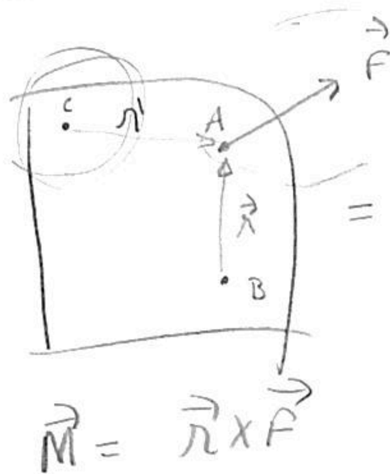
$\vec{r}'' \times \vec{F} + \vec{M}'$

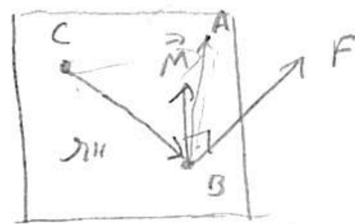
$$(r''' + \vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{F} + \vec{M}' = r''' \times \vec{F} + (\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{F} + \vec{M}' =$$

$$= \vec{r}''' \times \vec{F} + \underbrace{\vec{r}' \times \vec{F} - \vec{r} \times \vec{F} + \vec{M}'}_{\vec{M}}$$









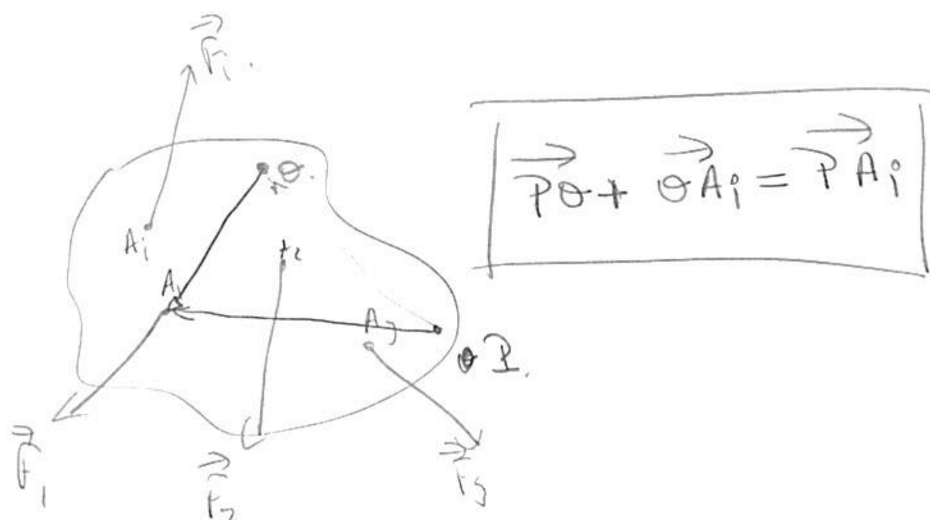
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{F}$

$\underbrace{\vec{M} + r'' \times \vec{F}}$

$\vec{r} \times \vec{F} + r'' \times \vec{F}$

$\underbrace{(\vec{r} + \vec{r}'')}_{r'} \times \vec{F}$



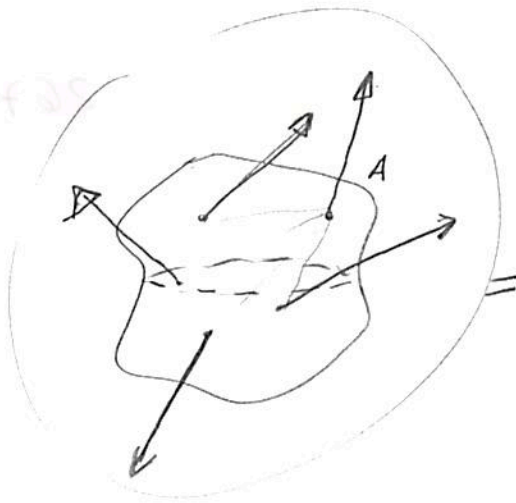
$$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{PA_i}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{T}_{iO} = \overrightarrow{OA_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{OA_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{OA_3} \times \vec{F}_3 + \dots + \overrightarrow{OA_N} \times \vec{F}_N = \vec{0}.$$

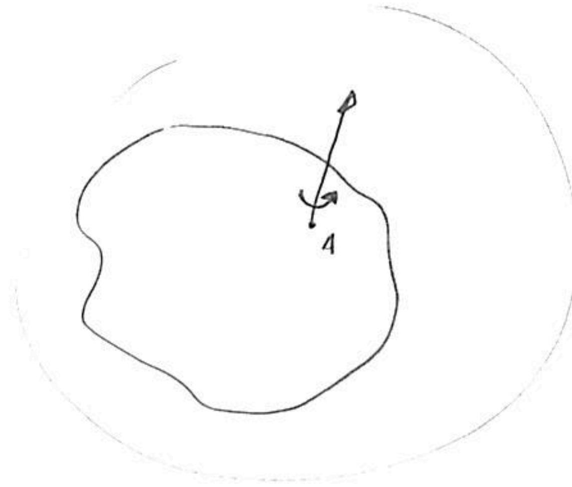
$$\sum_{i=1}^{N} \vec{T}_{iP} = \overrightarrow{PA_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{PA_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{PA_3} \times \vec{F}_3 + \dots + \overrightarrow{PA_N} \times \vec{F}_N =$$

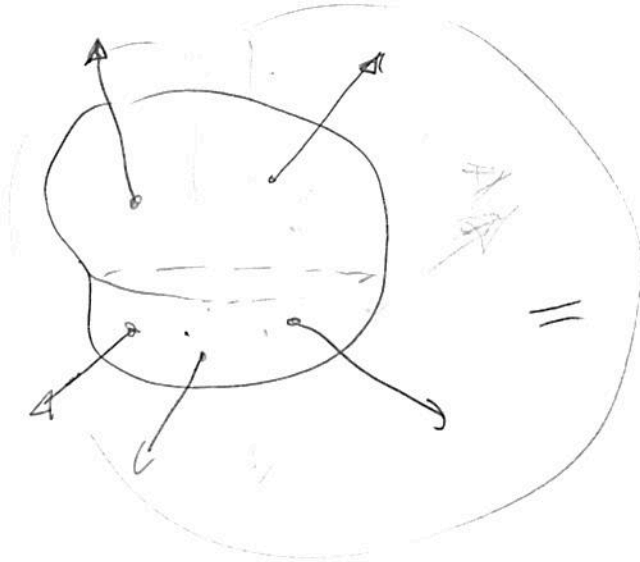
$$= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_1}) \times \vec{F}_1 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_2}) \times \vec{F}_2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_3}) \times \vec{F}_3 + \dots + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_N}) \times \vec{F}_N =$$

$$= \overrightarrow{PO} \times \underbrace{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N)}_{\vec{R} = \vec{0}.} = \vec{0}.$$

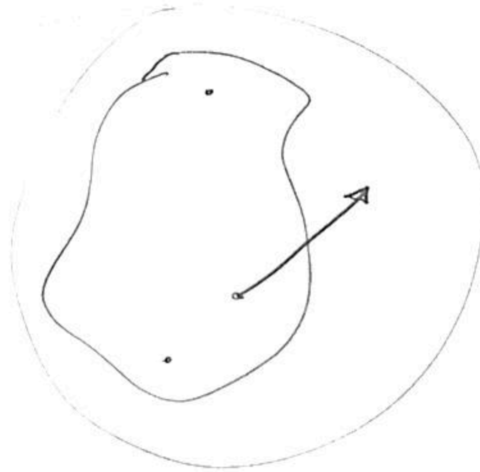

A

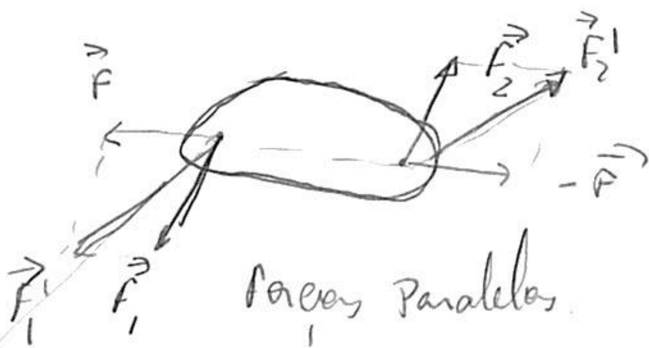
=

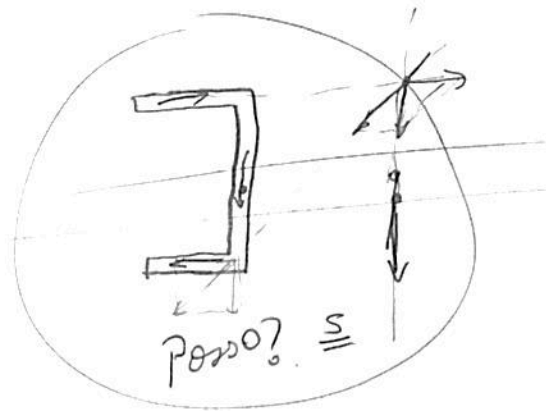

A



=




$\vec{F}$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_2'$
$-\vec{F}$
$\vec{F}_1'$
$\vec{F}_1$
Forças Paralelas


Peso? ≦